Μαθημα 1ο 8/10/2018

ΑΕΣΔΕ

- Βιβλιο : Αριθμ. Μεθοδοι για ΣΔΕ , Ακριβης , Δουγαλης

{Απο την 3η εβδομαδα και μετα θα γινουν 3 εργαστηρια}

- email: mxenos@cc.uoi.gr
- Γραφειο : 313Δ
- Σελιδα : users.uoi.gr/mxenos

Συνηθεις Διαφορικες Εξισωσεις (ΣΔΕ)

Μια εξισωση που περιεχει την αγνωστη συναρτηση και

π.χ : $y(x) \rightarrow$ ανεξ. μεταβ.

$\downarrow$ εξαρτημενη μεταβ.

τις παραγωγους της μεχρι ν-ταξης

{πρεπει παντα να εχουμε στο μυαλο μας τα ερωτηματα αυτα}

(1) Ειναι ΣΔΕ;

$\alpha x + \beta y = \gamma$ → γραμμικη

$\alpha y'(x) + \beta y(x) = \gamma \Rightarrow y'(x) + \frac{\beta}{\alpha} y(x) = \frac{\gamma}{\alpha}$, $\alpha \neq 0$

(*) Εξισωση Laplace : $\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} = 0$ πιο απλη μερικη διαφ. εξισωση (εξισωση θερμοτητας)

(2) Ταξη, βαθμος;

$y' + \beta y = \gamma$ → 1ης ταξης, 1ου βαθμου

Δ.Ε → Γραμμικες / → Μη γραμμικες

(3) Γραμμικη

$(y')^2 + \beta y = \gamma$ → μη γραμμικη

$y' + \beta y^2 = \gamma$ → μη γραμμικη λογω του ορου βy^2

Γραμμικη οταν εχω εξισωση πρωτου βαθμου

3. Μη γραμμικοτητα: ειναι οι οροι της μορφης $y'y$, yy, y^2.
yy'', $y'y''$ κλπ [τριγωνομετρικες, υπερβολικα τριγ.]

(4) Ομογενης ή οχι;
Ειναι ομογενης οταν ενα σταθερο ορο το 0 | Μη ομογενης οταν γ = ? ορος

$y'(x) + \beta y(x) = \gamma$ → ΣΔΕ, 1ης ταξης, 1ου βαθμου, Γραμμικη
Μη ομογενης

$y'(x) + \beta y(x) = \gamma y$ → Ομογενης

$y'(x) + \beta y(x) = \gamma x$ → Μη ομογενης

▸ **ΣΔΕ 1ης ταξης**

$y'(x) + p(x)\,y(x) = q(x)$, $p(x), q(x) \neq 0$

Η λυση αυτης ειναι: $y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[c + \int q(x)\, e^{\int p(x) dx} dx\right]$

απειρο λυσεις αναλογα με τις τιμες του C

Την λυση την βρισκω αν πολλ/ω με τον οποιο παραγοντα $e^{\int p(x)dx}$

↳ Γενικη λυση μονοπαραμετρικη οικογ. λυσεων

▸ **ΣΔΕ 2ης ταξης** {λυση με χαρακτηριστικο πολυωνυμο}

$y''(x) + \beta y'(x) + \gamma y(x) = 0$
Υποθετουμε οτι e^{ax}
$a^2 + \beta a + \gamma = 0$

→ Αν μου δωσει αρχικη συνθηκη, $y(0) = y_0$ βρισκω μια $y(x)$ μερικη λυση και γραφω: $y_p(x)$ ή $y_{μερικη}(x)$

■ **Προβληματα Αρχικων Τιμων (ΠΑΤ)**

π.χ.: $\begin{cases} y' + p(x)\,y = q(x) & , p,q \neq 0 \\ y(a) = y_0 & , x \in [a,b] \end{cases}$

(*) Γενικη Μορφη που θα χρησιμοποιουμε

ΠΑΤ: $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & , t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Ειναι ΣΔΕ, 1ης ταξης, 1ου βαθμου, Δεν ξερω για γραμμικοτητα, Δεν ξερω ομογενης ή οχι αναλογα με την f

Ψαχνουμε να βρουμε λυση $y : [a, b] \to \mathbb{R}$

μικρη διαταραχη στις αρχικες συνθηκες μου οποτε τη λυση

· Τα θεωρω παντα δεδομενα

▶ (1) Υπαρξη και μοναδικοτητα λυσης

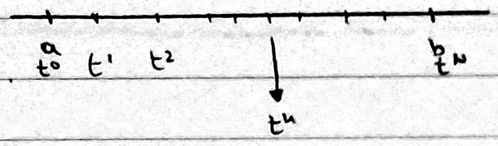
(2) Ευσταθεια

(3) Συστηματα ΣΔΕ

$\boxed{\text{η πιο απλη αριθμητικη μεθοδος ειναι του Euler}}$

κανω το διαστημα απο συνεχες → διακριτο

▶ $y'|_{t^n}$ $t \in [a, b]$



προσ.

$$y'|_{t^n} = \frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h} = \frac{y^n - y^{n-1}}{h}$$

$$\frac{y^n - y^{n-1}}{h} = y^n \Rightarrow y^n - y^{n-1} = hy^{n-1}$$

$$y^n - y^{n-1} = hy^n$$

όχι απολυτα ευσταθης

αμεση Euler συγκλινει υπο συνθηκες

πεπλεγμενη Euler συγκλινει παντα

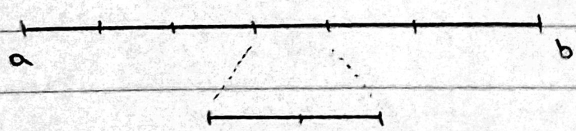
απολυτα ευσταθης

$y^n - y^{n-1} = hf(t^{n-1}, y^{n-1})$, $t: t^0 = a, t^1, t^2, \dots, t^n, \dots, t^N = b$ ομοιομ. διαμ.

$$h = \frac{b-a}{N}$$

■ Μεθοδοι Runge-Kutta (~1900)

• Μονοβηματικες Μεθοδοι



(*) Ταξη ακριβειας: βημα $h = 0.1$ ακριβεια 1 δ.ψ

Euler: τ.α 0.1

R-K4: τ.α 0,0001 αμεσες μεθοδοι, μεγαλη τ.α

- <u>Πολυβηματικές μέθοδοι</u> (θυμούνται περισσότερο από 1 χρ. σημείο)

π.χ $a^0 y^{(n)} + a^1 y^{n-1} + a^2 y^{n-2} + \dots + a^k y^{n-k} = \beta^0 f^{(n)} + \beta^1 f^{n-1} + \dots + \beta^k f^{n-k}$ πεπλεγμένη

για να είναι άμεση έπρεπε στο δεξί μέλος να είχα ένα βαθμό λιγότερο

$a^0 y^n + a^1 y^{n-1} + a^2 y^{n-2} + \dots + a^k y^{n-k} = \beta^0 f^{n-1} + \dots + \beta^{k-1} f^{n-k}$ άμεση

σο θυμάμαι!

$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \to$ Αραιός (sparse) $\quad \begin{pmatrix} a & \beta & \gamma & \dots \\ \epsilon & \mu & \xi & \dots \\ & \dots & & \end{pmatrix} \to$ Πυκνός (στοιχεία παντού)

<u>Παράδειγμα</u>

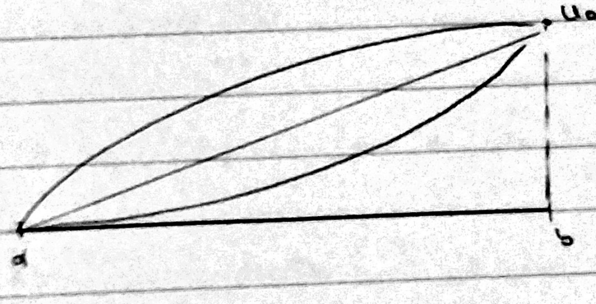
Μονοδιάστατο πρόβλημα διάχυσης (2ης τάξης)

<u>Laplace</u>

$\nabla^2 f = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

ΠΣΤ $\begin{cases} -u'' + qu = f, & x \in [a,b] \\ u(a) = u(b) = u^0 \end{cases}$

Διαφοροποίηση: $u(a) = 0$, $u(b) = u^0$



→ Για την γραμμικότητα

$$u''\Big|_{x^n} = \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{h^2} + O(h^2)$$